Άμεσης ανάσυρσης παραδείγματα και αντιπαραδείγματα στην διδασκαλία των Μαθηματικών στην Μέση Εκπαίδευση.

Ιωάννης Π. Πλατάρος

M.edu. διδακτική & Μεθοδολογία των Μαθηματικών

Ηλ.ταχ. plataros@gmail.com

Περίληψη

Η σχεδίαση μιας διδασκαλίας, προϋποθέτει σύνταξη σχεδίου εργασίας , φύλλου εργασίας μαθητή και φυσικά άμεση αναδρομή στο διδακτικό εγχειρίδιο. Ωστόσο, υπάρχουν κάποια ουσιώδη παραδείγματα και αντιπαραδείγματα η γνώση των οποίων από τον διδάσκοντα και η στιγμιαία ανάσυρσή τους οποτεδήποτε χρειαστεί, να αποτελεί μια εκ των ων ουκ άνευ συνθήκη για την αποτελεσματική διδασκαλία των Μαθηματικών στην τάξη.

Λέξεις –κλειδιά: παραδείγματα, αντιπαραδείγματα, διδασκαλία Μαθηματικών.

Εισαγωγή

Την εποχή όπου η Google είναι και επιστημονικό κομπιουτεράκι, η μηχανή Wolframalpha παραγοντοποιεί, επιλύσει εξισώσεις σε διαδοχικά βήματα, κάνει γραφικές παραστάσεις σε οποιαδήποτε καμπύλη κάτι σαν το λογισμικό Mathematica επί γραμμής κινητής τηλεφωνίας, μοιάζει εκ πρώτης όψεως άσκοπη η γνώση κάποιων συγκεκριμένων παραδειγμάτων στα Μαθηματικά, που πρέπει να γνωρίζει για την διδασκαλία του, ιδίως ο νέος Μαθηματικός. Όμως οι ιδιαιτερότητες της αμεσότητας της διδακτικής πράξης επιβάλουν άμεση ανάσυρση και χρήση συγκεκριμένων διδακτικών παραδειγμάτων, για τα οποία δεν υπάρχει χρόνος καταφυγής σε σημειώσεις στο βιβλίο, στο λυτάριο, ενώ συνηθέστατα, δεν μπορεί να προβλεφθεί η ανάγκη χρήσης τους κάθε φορά, αφού η χρήση τους προκύπτει από ερωτήσεις μαθητών όχι πάντα προβλεπόμενες. Και ακριβώς επειδή δεν είναι προβλεπόμενες εκφεύγουν του όποιου προγραμματισμού και εμπίπτουν στο φάσμα της «διδακτικής επιστημονικής ετοιμότητας». Και είναι αλήθεια, ότι πάμπολα διδακτικά παραδείγματα και αντιπαραδείγματα, όντως μπορεί να κατασκευάσει στιγμιαίως ο καθηγητής, όμως γενικώς , *«ο σχεδιασμός παραδειγμάτων είναι απαιτητική εργασία και προϋποθέτει άριστη γνώση της θεωρίας, διδακτική εμπειρία και ενημέρωση για την προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών»* (Κανελλοπούλου ,Μ. 2012) Το ευτύχημα είναι, ότι η γνώση κάποιων συγκεκριμένων παραδειγμάτων είτε κλάσεων παραδειγμάτων, δεν είναι τόσο μεγάλης έκτασης -όπως ίσως αναμένει κάποιος- και περιορίζεται σε έναν μικρό αριθμό, αφού η θεωρία των Μαθηματικών καλύπτει με άμεσο τρόπο πολλές περιπτώσεις. Επομένως η παρούσα εργασία δεν θα μπορούσε να φιλοδοξήσει να καλύψει τις τυχούσες επιστημονικές ελλείψεις του όποιου εκπαιδευτικού, αλλά να αμβλύνει αισθητά αυτή την αίσθηση μέσα στην τάξη, ώστε να προαχθεί η

αποτελεσματικότητα της διδασκαλίας. Από τις σχετικές επί του θέματος αναφορές, (Ζαχαριάδης κ.ά. 2007) , (Πλατάρος ,Ι. 2004, 2007, 2008) επιλέγουμε παραδείγματα και αντιπαραδειγματα.

Παραδείγματα από Άλγεβρα:

α) Τριώνυμα όπου η τετραγωνική ρίζα της διακρίνουσας είναι ακέραιος προς διευκόλυνση των μαθητών που μαθαίνουν τον τύπο των ριζών. Μπορούμε να χρησιμοποιούμε τον κατασκευαστικό τύπο των ριζών x_1, x_2 , $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$ (**Vieta**) με x_1, x_2 ακεραίους. Επίσης πολύ χρήσιμη και άμεση είναι η καταφυγή στην στιγμιαία κατασκευαστική συνθήκη α+β+γ=0, με α,β,γ ακεραίους στην τριωνυμική εξίσωση $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0,\ \ \alpha\neq 0$ η οποία εξασφαλίζει μια ρίζα $x_1=1$, $x_2=\frac{\gamma}{\alpha}$ και Δ=|α-γ| . Ανάλογη συνθήκη ισχύει και για όλα τα πολυώνυμα και μάλιστα και για τα 3^{ου} βαθμού, όπου με **σχήμα Horner** η ρητή ρίζα (εδώ η μονάδα) μπορεί εύκολα να προκύψει και μετά οι δύο άλλες με την τριωνυμική εξίσωση. Στιγμιαία λοιπόν ο καθηγητής λέει *«για λύστε κι αυτή…»* και είναι σε ετοιμότητα να απαντά θετικά στην ερώτηση *«ξέρετε κύριε αν βγαίνει η ρίζα;»*

β) Το μαγικό κόλπο του τύπου *«πάρε ένα αριθμό, όποιον θέλεις , διπλασίασέ τον, πάρε και 10 από μένα, ρίξε τα μισά στην θάλασσα, πάρε και ένα από μένα, πέτα στην θάλασσα τον αρχικό αριθμό, να σου πώ τι βρήκες; 6!»* Ο καθηγητής θα το συναντήσει στην Β΄ Γυμνασίου, όπου όλοι «το ξέρουν» που τους το έχει πει κάποιος γνωστός, αλλά φυσικά για την εξήγηση ούτε νύξη. Είναι ένα «μαγικό», από τα πολλά μαγικά κατάλοιπα της διδασκαλίας των Μαθηματικών που χρειάζεται «αποδαιμονοποίηση» και διαφάνεια με την απόδειξη και κατάδειξη. Μια κλάση τέτοιων παραδειγμάτων που μπορεί να φτιάξει καθηγητής είναι η εξής:

$\frac{2\chi+2\alpha}{2}-\chi+\beta=\alpha+\beta$ για τις «αόριστες εξισώσεις» ή ταυτότητες ως διδακτική νύξη.

γ) Εποπτική κατάδειξη απειροστικών αποτελεσμάτων σε μικρή ηλικία, όπως λ.χ. ότι $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+...+\frac{1}{2^\nu}+....=1$. «Το θρανίο μας έχει μήκος 1 μέτρο, μια μονάδα, μια θρανιομονάδα. Παίρνουμε στην ανάγκη ένα θρανίο με μήκος 1μέτρο. Μέχρι την μέση πόσο μήκος έχω; Δείξτε με το δάκτυλο. ½ ! Μέχρι την μέση της μέσης πόσο είναι ακόμα; (Διαπραγμάτευση ¼) Μέχρι την μέση της μέσης της μέσης; (1/8) κτλ Κάνουμε σχεδόν σημειωτόν! Δεν φθάνουμε ποτέ στο 1. Όλη μας την ζωή δεν το φθάνουμε, στο άπειρο το φθάνουμε!...» Εδώ υπάρχουν άπειρες «νοητικές βόμβες», αλλά και οι ενήλικοι με τα παράδοξα του Ζήνωνος έχουν Ιστορικά μπερδευτεί πάρα πολύ, καθώς η πρόσθεση άπειρων στο πλήθος ευθυγράμμων τμημάτων δεν δίνει όπως η ανθρώπινη διαίσθηση υπαγορεύει ευθεία ή ημιευθεία (δηλ. άπειρου μήκους αντικείμενα) αλλά ενίοτε -όπως εδώ- ευθύγραμμο τμήμα, πεπερασμένο , το μήκος 1m του θρανίου. Σε

μορφή δραστηριότητας μπορεί να επεκταθεί με τους κύβους ακμών 1m, 0,5 m , 0,25m, ο,125m, κ.ο.κ. που τίθενται ο ένας άνω στον άλλον, για το αν φθάνουν στο ταβάνι επ΄ άπειρον, πόσο εμβαδόν θα έχουν οι άπειροι κύβοι κτλ

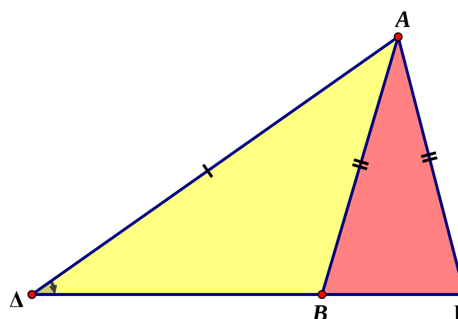
Ένα άλλο προσιτό καθημερινό παράδειγμα είναι το $\frac{1}{3}=0,333...=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+...$

δ) Το ανοικτό διάστημα-σύνολο (0,1) δεν έχει μέγιστο στοιχείο, διότι αν υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα α μέγιστο, τότε $\alpha<1\ και\ έπεται\ ότι\ \alpha<\frac{1+\alpha}{2}<1$, άτοπο, διότι υποθέσαμε το α ως μέγιστο. Ούτε όμως το 0,99999… είναι το μέγιστο, αφού αυτό ισούται με 1, πράγμα που επί πλέον δηλοί, ότι οι πραγματικοί αριθμοί, δεν έχουν μονοσήμαντη δεκαδική αναπαράσταση.

ε) Ανάμεσα στους 2,3 και 2,4 εκ πρώτης όψεως δεν χωρά άλλος δεκαδικός, όμως όταν τους δούμε ως 2,30 και 2,40 χωρούν άλλοι 9, αν τους δούμε ως 2,300 και 2,400 άλλοι 99 και τελικώς «οσοδήποτε πολλοί», άπειροι. Ομοίως ανάμεσα στους $\frac{7}{11}\ και \frac{8}{11}$ δεν φαίνεται να χωρά άλλος ρητός, όμως αν τους δούμε ως $\frac{70}{110}\ και \frac{80}{110}$ χωρούν άλλοι 9 κ.ο.κ. «τελικώς όσοι θέλουμε», δηλ. άπειροι.

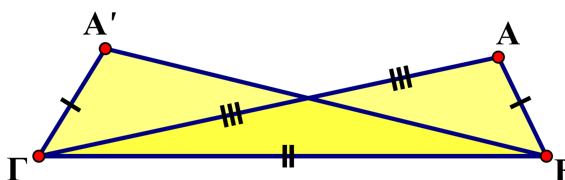
Παραδείγματα στην Γεωμετρία:

Α) Αντιπαράδειγμα στον συνήθη ισχυρισμό ότι *«δύο τρίγωνα με δύο ίσες πλευρές μία προς μία και από μια γωνία ίσες , είναι ίσα»*. Η γνώση του παραδείγματος που εναντιώνεται στην καθολική ισχύ του ισχυρισμού (=αντιπαράδειγμα) καθιστά πιο προσεκτικούς τους μαθητές στην διατύπωσή του κριτηρίου ισότητας τριγώνων, αφού τους πείθει άμεσα για το λανθασμένο της διατύπωσης και του αναφορικού νοήματος.



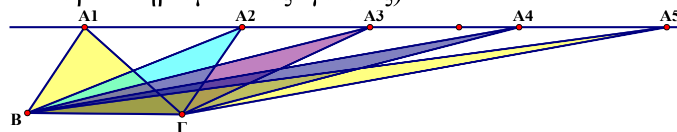
Το κίτρινο τρίγωνο, προφανώς και είναι άνισο με το τρίγωνο της κίτρινης +ροζ περιοχής, παρ΄ ότι έχουν από δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία και από μια γωνία τους κοινή.

Β) Δύο τρίγωνα ίσα, δεν είναι πάντα και συμπτώσιμα με μεταφορά και στροφή. Ίσως χρειάζεται εφαρμοστεί και κατοπτρισμός. Το παράδειγμα των δύο παλαμών του ανθρώπου που δεν είναι

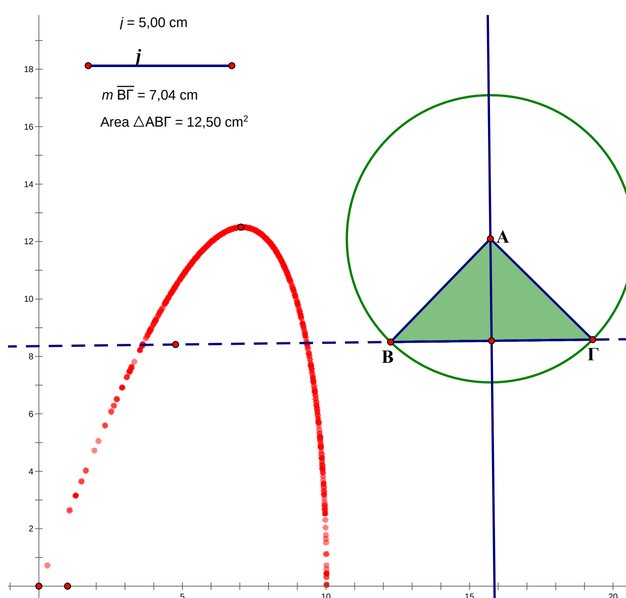


συμπτώσιμες (δεξί αριστερό) αλλά πρέπει η μία να περιστραφεί 180^0 για να συμπέσει με την άλλη, είναι πολύ άμεσο και παραστατικό.

Γ) Δύο γωνίες που έχουν πλευρές παράλληλες δεν σημαίνει ότι είναι και ίσες (Απλό σχήμα με δύο παράλληλες εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες)



Δ) Τρίγωνο με «οσοδήποτε μεγάλη» περίμετρο και σταθερό εμβαδόν. Αντί τριγώνου τίθεται και παραλληλόγραμμο.

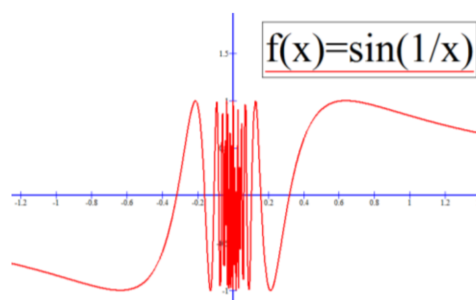


Ε) Όπως αναφέρουν οι Νεγρεπόντης, Σ. , Φαρμάκη, Β. (2006) Το τρίγωνο Α με μεγαλύτερες όλες τις πλευρές (5, 5, 8) από το τρίγωνο Β με πλευρές (4.95, 4.95, 7), έχει «παραδόξως» μικρότερο εμβαδόν. (Με βοήθεια Π.Θ. το τρίγωνο Α, έχει ύψος 3 και $Ε_Α$=12. Για το τρίγωνο Β: Πάλι με βοήθεια Π.Θ. έχει ύψος λίγο πάνω από 3,5 και βάση 7 ΄, άρα $Ε_Β$>12 .

ΣΤ) Τα τρίγωνα (5,5,8) και (5,5, 6) έχουν ίσα εμβαδά. (Απόδειξη παρομοίως.) Με δυναμικό λογισμικό Γεωμετρίας, μπορεί να γίνει γραφική παράσταση της συνάρτησης του εμβαδού $Ε_{ΑΒΓ}(χ)=\frac{1}{2}χ\sqrt{5^2-\frac{χ^2}{4}}$ όπου ΒΓ=χ και ΑΒ=ΑΓ=5. Αποδεικνύεται, ότι μέγιστο εμβαδόν έχω όταν ΒΓ=7,07 και Ε=12,50 ενώ εκατέρωθεν του 7, έχω άπειρα ζεύγη με ίσα εμβαδά. Εδώ ο καθηγητής θυμάται τις τριάδες (5,5,6) και (5,5,8) με τα ίσα εμβαδά και την τριάδα (5,5,7) που παρεμβάλεται το μέγιστο (περίπου) εμβαδόν. Εύκολα και εδώ τα παραδείγματα επεκτείνονται και σε παραλληλόγραμμα. Γενικά αποδεικνύεται, ότι αν α < β < γ είναι μια πυθαγόρεια τριάδα (δηλαδή αν $α^2+β^2=γ^2$), τότε τα τρίγωνα με πλευρές (γ, γ, 2α) και (γ, γ, 2β), έχουν ίσο εμβαδόν.

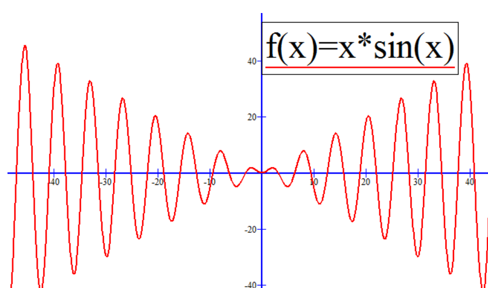
Παραδείγματα Απειροστικού Λογισμού

Εδώ παρά το πλήθος των λεπτών εννοιών προς κατανόηση, το πλήθος των εποπτικών παραδειγμάτων για την κατανόηση είναι πολύ λίγα. Υπάρχουν οι συναρτήσεις $f(χ)=ημχ$ και $g(χ)=\frac{1}{χ}$ όπου μαζί με την ταυτοτική $h(χ)=χ$ και με πράξεις τον πολλαπλασιασμό και την σύνθεση συναρτήσεων, μας δίνουν κρίσιμα



παραδείγματα αποσαφηνίζοντα λεπτά μέρη της θεωρίας του Απειροστικού. Η απομνημόνευση των παραδειγμάτων προϋποθέτει κατ΄ αρχήν κατανόηση του αναφορικού νοήματος της κατασκευής τους από τους αλγεβρικούς τους τύπους. Μια τέτοια ολική προσέγγιση των παραδειγμάτων προϋποθέτει αναγνώριση των εξής: 1) Η ημιτονοειδής συνάρτηση ημχ, είναι συνάρτησης ταλάντωσης με σταθερό πλάτος και σταθερή συχνότητα .2) Αφού $-1 \leq \eta\mu\chi \leq 1$ η συνάρτηση έχει ως περιβάλλουσες τις ευθείες y=-1 και y=1. 3) Η συνάρτηση ημ$\frac{1}{\chi}$ διατηρεί το πλάτος της, διατηρεί τις περιβάλλουσες αλλά αυξάνει την συχνότητά της οσοδήποτε, οσοδήποτε κοντά στο 0, ενώ χάνει την συχνότητά εκατέρωθεν των τιμών χ= 0,5 και χ= -0,5 τείνοντας στο 0, «κοντά» στο $+\infty$ *και* $-\infty$ 4) . Με ίδια λογική οπτικής, η συνάρτηση χημχ δεν διατηρεί την συχνότητα και αυξάνει το πλάτος απεριόριστα εκατέρωθεν του μηδενός καθώς «αποκλίνει» στο συν πλην άπειρο, έχοντας ως περιβάλλουσες τις y=x και y=-x, αφού $-1 \leq \eta\mu\chi \leq 1 \Rightarrow -\chi \leq \chi\eta\mu\chi \leq \chi,\ \forall \chi \in \mathbb{R}^{+}$ και $-\chi \geq \chi\eta\mu\chi \geq \chi,\ \forall \chi \in \mathbb{R}^{-}$ 5) Η συνάρτηση $\frac{1}{\chi}\eta\mu\chi$ διατηρεί συχνότητα, με απεριόριστο πλάτος κοντά στο 0 και με διαρκώς φθίνον πλάτος εκατέρωθεν του μηδενός προς το συν πλην άπειρο και επειδή $-\frac{1}{\chi} \leq \frac{\eta\mu\chi}{\chi} \leq \frac{1}{\chi}$ για χ>0 και $-\frac{1}{\chi} \geq \frac{\eta\mu\chi}{\chi} \geq \frac{1}{\chi}$ για χ<0, οι υπερβολές $-\frac{1}{\chi}$ *και* $\frac{1}{\chi}$ είναι περιβάλλουσες. Η συνάρτηση $\chi\eta\mu\frac{1}{\chi}$, εκατέρωθεν και κοντά στο 0, παρουσιάζει αύξηση συχνότητας ταλάντωσης με φθίνον πλάτος, ενώ λίγο πιο μακριά του μηδενός και εκατέρωθεν αυτού, έχουμε το σχήμα σύγκλισης $\pm\infty \cdot 0$ του οποίου το αποτέλεσμα δεν γίνεται αντιληπτό διαισθητικά, αλλά με υπολογισμό αξιοσημείωτων ορίων, ξέρουμε ότι κάνει 1. (Ανάγεται στο βασικό τριγωνομετρικό όριο $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu\chi}{\chi}=1$) 6) Αναλόγως, η $\frac{1}{\chi}\eta\mu\frac{1}{\chi}$ δεν διατηρεί ούτε πλάτος, ούτε συχνότητα, με τις ίδιες όπως και πριν περιβάλλουσες. Είναι μια ταλάντωση, που αυξάνει απεριόριστα και πλάτος και συχνότητα κοντά στο 0, ενώ λίγο μακρύτερα από το 0 και εκατέρωθεν αυτού, τείνει στο 0. Όλα τα περιγραφέντα μέχρι στιγμής, συμβάλλουν στην αποτελεσματική τους απομνημόνευση μέσω τις κατανόησης του αναφορικούς τους νοήματος. Επόμενο βήμα είναι η χρήση τους στην διασάφηση συνήθων παρανοήσεων της θεωρίας, γνωστικών εμποδίων και χρήση τους αναλόγως ως παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων.

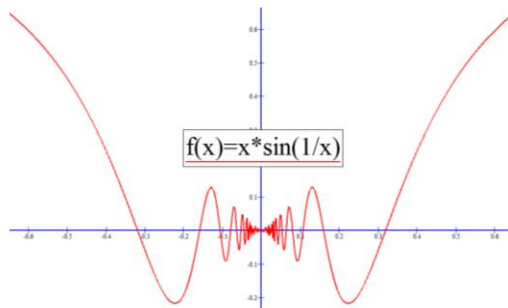
Έχουμε λοιπόν: α) Η συνάρτηση ημ(1/χ) : Οσοδήποτε κοντά στο 0, μπορεί να πάρει την τιμή 1 και την τιμή -1. Δεν σταθεροποιείται «σε μια τιμή κοντά» άρα δεν υπάρχει το όριο. Δεν μπορεί να γίνει άρση της ασυνέχειας. Οσοδήποτε κοντά στο 0 έχω άπειρα και ίσα τοπικά ακρότατα. Δεν μπορεί να σχεδιαστεί ικανοποιητικά με το χέρι. Και με τον Η/Υ υπερβαίνονται τα σχεδιαστικά όριά του.



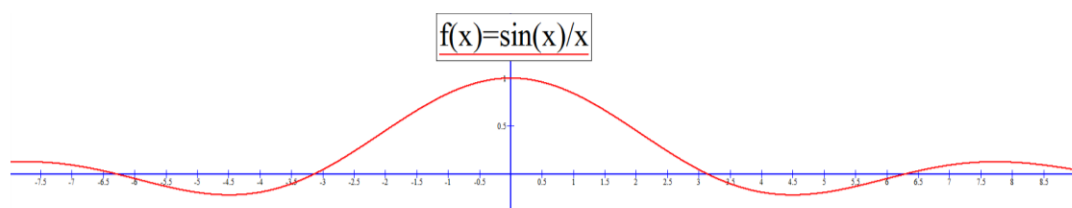
Β) Η συνάρτηση χημχ είναι παντού συνεχής, παντού παραγωγίσιμη, έχει άπειρα, διαφορετικά, μη φραγμένα τοπικά ακρότατα.

Γ) Η συνάρτηση χ ημ(1/χ) δεν ορίζεται στο 0. Εν τούτοις, υπάρχει το $\lim_{x\to 0} \chi\eta\mu\frac{1}{\chi}=0$.

Άρα η ασυνέχεια είναι άρσιμη, μπορεί δηλ. να αρθεί, αίρεται, με το να ορίσω εκ νέου την συνάρτηση ως $f(\chi)=\begin{Bmatrix} \chi\eta\mu\frac{1}{\chi},\ \alpha\nu\ \ \chi\neq 0 \\ 0\ , \qquad \alpha\nu\ \ \chi=0 \end{Bmatrix}$ η οποία είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$. Συνεχής είναι και ο περιορισμός της στο [0, 2] Στην συγκεκριμένο περιορισμό υλοποιείται ένα αντιπαράδειγμα σε μια διαισθητική πλάνη εξαιρετικά διαδεδομένη εξ αιτίας των περιορισμένης κλάσης παραδειγμάτων με τα οποία οικοδομούμε την έννοια της συνάρτησης. Σύμφωνα με αυτή την **λανθασμένη** διαισθητική γνώση, *«όταν μια συνεχής συνάρτηση φ, ορίζεται στο [α,β], στο α έχει τοπικό ακρότατο, όπως και στο β.»* Η «λογική» **της ισχυρά λανθασμένης πεποίθησης,** εδράζεται στο ότι μετά την τιμή (α,φ(α)) και δεξιότερα αυτής, υπάρχει περιοχή του α, όπου η φ, συνεχίζει ή οριζόντια ή συνεχίζει ανοδικώς ή συνεχίζει καθοδικώς. Ό,τι κι αν κάνει από τα τρία δυνατά ενδεχόμενα, έχει στο (α,φ(α)) τοπικό ακρότατο. Το συγκεκριμένο όμως αντιπαράδειγμα λέει ότι (0, φ(0))=(0,0) ενώ οσοδήποτε κοντά στο 0, έχω ετερόσημες τιμές για τον παράγοντα ημ(1/χ) άρα το (0,0) δεν είναι δυνατόν να είναι οιουδήποτε είδους ακρότατο.

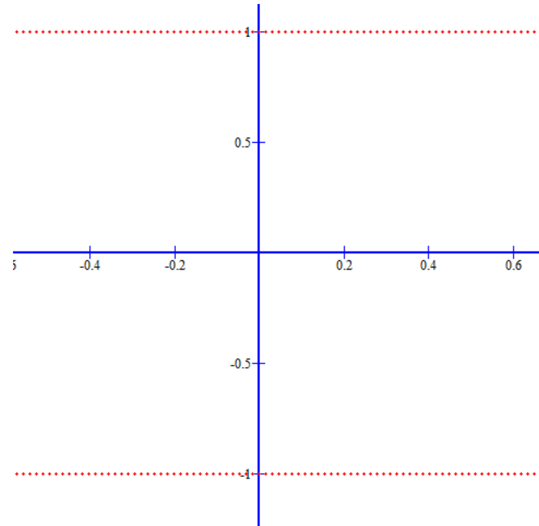


Δ) Η συνάρτηση $f(x)=\frac{\eta\mu\chi}{\chi}$ $/\mathbb{R}-\{0\}$ έχει άρσιμη ασυνέχεια στο σημείο 0 που δεν ορίζεται, αφού ως γνωστόν $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu\chi}{\chi}=0$ και έτσι, πρέπει και αρκεί να ορίσουμε επί



πλέον $f(0)=0$ που διασφαλίζει την συνέχεια της νέας συνάρτησης σε όλο το $\mathbb{R}$. Το αξιοσημείωτο όμως του παραδείγματος, είναι ότι με βάση τον ορισμό της ασυμπτώτου, η *f* έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία y=0 (δηλ. τον άξονα χχ΄) κόντρα σε μια επίσης διαδεδομένη λανθασμένη αντίληψη ότι η ασύμπτωτη ευθεία δεν έχει κοινά σημεία με το διάγραμμα της συνάρτησης και μάλιστα άπειρα κοινά και μάλιστα η απειρία των κοινών σημείων εντοπίζεται «οσοδήποτε κοντά» στο $+\infty$ είτε $-\infty$. Η λανθασμένη αυτή πεποίθηση σχηματίζεται για δύο πιθανόν λόγους : 1. Λόγω της ετυμολογικής καταγωγής του όρου «ασύμπτωτη» (= δεν συμπίπτει πόσο δε μάλλον δεν τέμνει) που ισχύει μόνο σε Ελληνόφωνους εκπαιδευμένους γλωσσικά. 2. Ο ορισμός λ.χ. της πλάγιας ασύμπτωτης στο $+\infty$ μιας συνάρτησης *f(x)*, απαιτεί η ασύμπτωτη ευθεία

$y=\lambda x+\beta$ να πληροί την συνθήκη $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(\lambda\chi+\beta)]=0$. Η εσφαλμένη ερμηνεία της συνθήκης έχει να κάνει με την εκτεταμένη και γνωστή από την βιβλιογραφία παρανόηση των μαθητών όπου ερμηνεύουν το γενικό σχήμα του ορίου Α→Β ως μια διαδικασία, όπου η ποσότητα Α πλησιάζει την Β οσοδήποτε κοντά χωρίς κατ΄ ανάγκην να την φθάνει. Πρόκειται για γνωστικό εμπόδιο, που αντιστέκεται επιμόνως (γι΄ αυτό ορίζεται και ως τέτοιο) όπου προσπάθεια άρσης του, μπορεί να γίνει μόνο με κατάλληλα παραδείγματα της έννοιας. Το προηγούμενο παράδειγμα του ορίου $\lim_{x\to 0}\chi\eta\mu\frac{1}{\chi}=0$ είναι ένα τέτοιο, σπανίως απαντώμενο στην διδακτική πράξη παράδειγμα, όπου καθώς $\chi\to 0^+$ ή $\chi\to 0^-$ η παράσταση $\chi\eta\mu\frac{1}{\chi}$ αλλάζει πρόσημο οσοδήποτε κοντά στο 0, φθάνοντας τελικά το 0, προσπερνώντας το, πλησιάζοντάς το από την αντίθετη κατεύθυνση, κάνοντας μια κίνηση που προσομοιώνεται με μια φθίνουσα απειροταλάντωση εκετέρωθεν της τιμής y=0. Αν μάλιστα θεωρήσουμε την συνάρτηση της απόλυτης τιμής της $\left|\chi\eta\mu\frac{1}{\chi}\right|$ τότε έχει ολικό ελάχιστο στο 0, ενώ εκατέρωθεν του μηδενός, δεν υπάρχουν διαστήματα της μορφής (α,0] ή [0,β) που να είναι μονότονη!



Ε) Η συνάρτηση $\frac{1}{\chi}\eta\mu\frac{1}{\chi}\ /\mathbb{R}-\{0\}$ δεν έχει όριο στο 0, όμως σε οποιοδήποτε διάστημα του μηδενός, «οσοδήποτε μικρό» περιέχει άπειρα το πλήθος τοπικά ακρότατα, διαφορετικά και οσοδήποτε μεγάλα. Ακόμα και η σχεδίασή της μέσω Η/Υ μόνο ενδεικτική είναι για την πραγματικό γράφημά της, όπως άλλωστε και των υπολοίπων.

ΣΤ) Η συνάρτηση του Dirichlet , ορίζεται ως $f(x)=\begin{Bmatrix}1, & \alpha\nu\ \chi\ \rho\eta\tau\acute{o}\varsigma\\ -1, & \alpha\nu\ \chi\ \acute{\alpha}\rho\rho\eta\tau o\varsigma\end{Bmatrix}$ η οποία είναι ασυνεχής για κάθε πραγματικό αριθμό. Αν την τροποποιήσουμε λίγο ως προς το «να τέμνονται» υπό μία έννοια οι οιονεί «διάτριτες- διάστικτες ευθείες» π.χ. ως $g(x)=\begin{Bmatrix}x, & \alpha\nu\ \chi\ \rho\eta\tau\acute{o}\varsigma\\ -x, & \alpha\nu\ \chi\ \acute{\alpha}\rho\rho\eta\tau o\varsigma\end{Bmatrix}$ τότε είναι συνεχής μόνο στο 0 και ασυνεχής οπουδήποτε αλλού. Επίσης η f θεωρείται περιοδική με περίοδο οποιονδήποτε ρητό ρ>0. Υπό έναν άλλον ορισμό της περιοδικής συνάρτησης, επειδή δεν έχει ελάχιστη θετική περίοδο, λόγω πυκνότητας των ρητών, δεν θεωρείται περιοδική. Επίσης το 1 είναι ένα ολικό μέγιστο, όμως η συνάρτηση δεν έχει κανένα διάστημα μονοτονίας, σε οποιονδήποτε περιορισμό της.

Συμπεράσματα.

Κατεβλήθη προσπάθεια συνειδητή, να παρουσιασθεί ο ελάχιστος αριθμός παραδειγμάτων για σχολική καθημερινή χρήση, που να έχει όμως την μέγιστη δυνατή χρησιμότητα και εντός της εκτάσεως της εργασίας. Χωρίς να μπορούν να καλυφθούν όλα, επιστρατεύοντας και την μακρά προσωπική διδακτική εμπειρία, θεωρούμε, ότι η ετοιμότητα ανάσυρσης και κατασκευής των συγκεκριμένων παραδειγμάτων (ή με χρήση τους και ως αντιπαραδειγμάτων) βελτιώνει εν τη πράξει το έργο των νέων εκπαιδευτών Μαθηματικών.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Ζαχαριάδης, Θ., Πάμφιλος. Π., Jones, K. Maleev, R., Χρίστου, Κ., Γιανακούλιας, Ε.,. Levy, R. Nikolova, L. Κυριαζής, Γ., Πίττα-Πανταζή, Δ. Διακουμόπουλος, Δ. Μπιζά, Ε., Σουγιούλ Α., Bujukliev, N., Μουσουλίδης, Ν., Πιττάλης, Μ..(2007) *Διδασκαλία της Μαθηματικής Ανάλυσης με Χρήση Εργαλείων Δυναμικής Γεωμετρίας* Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Παν. Κρήτης, Παν. Southampton, Παν. Σόφιας, Παν. Κύπρου.

Ανακτήθηκε 5/12/16 από : www.math.uoa.gr/calgeo/docs/6.2.1.book.CalGeo.gr.pdf

Νεγρεπόντης, Σ. , Φαρμάκη, Β. (2006) *«Η «παράλογη» αποτελεσματικότητα των Μαθηματικών στις άλλες επιστήμες»* Ανακτήθηκε 5/12/16 από: http://thalesandfriends.org/wp-content/uploads/2012/03/efficiency.pdf

Κανελλοπούλου, Μ. (2012) «Η σημασία του παραδείγματος και του αντιπαραδείγματος στην Διδασκαλία των Μαθηματικών» Διπλωματική εργασία «Διδακτική & Μεθοδολογία των Μαθηματικών» του Μαθ/κού Τμήματος του ΕΚΠΑ Ανακτήθηκε 5/12/2016 www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_Kanellopoulou%20Maria.pdf

Πλατάρος, Ι. (2004) *«Η Διδασκαλία του Απειροστικού Λογισμού μέσω Αντιπαραδειγμάτων»* διπλωματική εργασία «Διδακτική & Μεθοδολογία των Μαθηματικών» του Μαθ/κού Τμήματος του ΕΚΠΑ Ανακτήθηκε 5/12/16 από: www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_plataros.pdf

Πλατάρος, Ι..(2008) *:«Διδακτικά εμπόδια στην έννοια της ασύμπτωτης συνάρτησης» εργασία.* Ανακτήθηκε 5/12/16 από *:* https://tr.scribd.com/document/17542102

Πλατάρος, Ι. *«Επίλεκτα Παραδείγματα και Αντιπαραδείγματα για την Διδασκαλία εννοιών του Απειροστικού Λογισμού.»* Περιοδικό «Φ» Νοέμβριος 2008 , τεύχος 5 , σελ. 90-113 Ανακτήθηκε 5/12/16 από : https://es.scribd.com/document/17538392

Πλατάρος, Ι. (2007) «Το Αντιπαράδειγμα, ως θεραπεία λαθών στα μαθηματικά» Πρακτικά συνεδρίου Κέντρο Εκπαιδευτικής έρευνας Ανακτήθηκε 5/12/16 από : http://www.slideshare.net/plataros/ss-7062621

Πλατάρος, Ι. (2007) *«Η διδασκαλία Μαθηματικών εννοιών με παραδείγματα και Αντιπαραδείγματα»* Πρακτικά 24ου Πανελλήνιου Συνέδριου Μαθηματικής Παιδείας Κοζάνη. Ανακτήθηκε 5/12/16 από:
users.uoa.gr/~spapast/SynedrKozan/Praktika/06Programmata/3005Plataros.doc